2023-2024学年上学期期末模拟考试01

高二数学

（考试时间：120分钟 试卷满分：150分）

注意事项：

1．本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分。答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答第Ⅰ卷时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。

3．回答第Ⅱ卷时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

4．测试范围：**空间向量与立体几何、直线与圆的方程、圆锥曲线、数列**。

5．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

**第**Ⅰ**卷**

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.直线的倾斜角是（    ）

A． B． C． D．

【答案】D

【分析】根据已知条件，结合直线的倾斜角与斜率的关系，即可求解．

【详解】设直线的倾斜角为，，

直线可化为，

所以直线的斜率，

，

故选：D．

2. 已知，分别是平面的法向量，若，则（ ）

A.  B.  C. 1 D. 7

【答案】B

【解析】

【分析】利用平面平行可得法向量平行，列出等式即可求解

【详解】因为，分别是平面的法向量，且，

所以，即，解得

故选：B

3．设等比数列的前项和为，若，且，，成等差数列，则（    ）

A．7 B．12 C．15 D．31

【答案】C

【分析】设出公比，根据，，成等差数列列出方程，求出公比，利用等比数列求和公式得到答案.

【详解】设公比为，因为，，成等差数列，所以，

则，解得：或0（舍去）.

因为，所以，故.

故选：C

4．设，则“”是“直线与直线平行”的（    ）

A．充分不必要条件 B．必要不充分条件 C．充要条件 D．既不充分也不必要条件

【答案】A

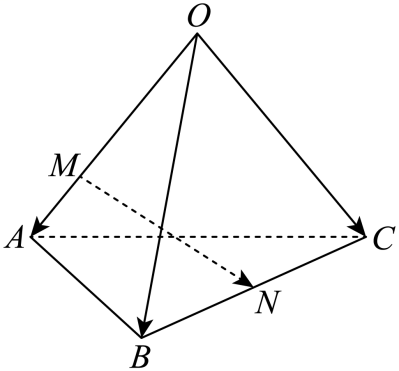
【分析】根据直线平行的条件和充分必要条件的概念可判断结果.

【详解】因为直线与直线平行的充要条件是且，解得或．

所以由充分必要条件的概念判断可知：“”是“直线与直线平行”的充分不必要条件，

故选：A

5．如图，在四面体中，．点在上，且为中点，则等于（ ）



A.  B. 

C.  D. 

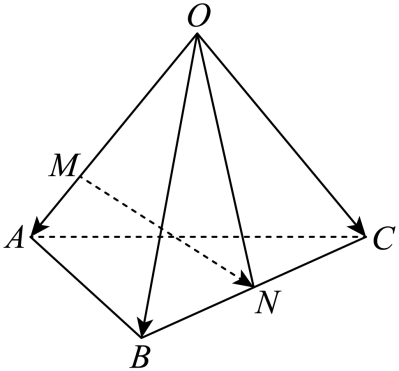
【答案】B

【解析】

【分析】连接，利用空间向量基本定理可得答案.

【详解】连接．

故选：B.



6． 已知圆：与圆：相内切，则与的公切线方程为（ ）

A.  B. 

C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】由两圆的位置关系得出，进而联立两圆方程得出公切线方程.

【详解】圆：的圆心，圆：可化为

，，则其圆心为，半径为，

因为圆与圆相内切，所以，即，故.

由，可得，

即与的公切线方程为.

故选：D

7．已知数列满足，且，若，则正整数为（    ）

A．13 B．12 C．11 D．10

【答案】B

【分析】确定，，利用累加法确定，代入计算得到答案.

【详解】，故，，故，

.

故，

，即，故，解得.

故选：B

8．已知为椭圆*C*：的右焦点，*P*为*C*上的动点，过*F*且垂直于*x*轴的直线与*C*交于*M*，*N*两点，若等于的最小值的3倍，则*C*的离心率为（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】根据椭圆的性质以及通径，可得，，再根据已知列式，结合椭圆的关系，求出离心率即可.

【详解】为椭圆*C*：的右焦点，*P*为*C*上的动点，

由椭圆的性质，可得.

过*F*且垂直于*x*轴直线与*C*交于*M*，*N*两点，

.

等于的最小值的3倍，

.

椭圆中，

，即，

则.

，

，解得或（舍）.

故选：B.

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．

9. 已知曲线：，：，则（ ）

A. 的长轴长为4

B. 的渐近线方程为

C. 与的焦点坐标相同

D. 与的离心率互为倒数

【答案】BD

【解析】

【分析】根据椭圆与双曲线的标准方程，结合它们的几何性质逐项判断即可.

【详解】曲线：整理得，则曲线是焦点在轴上的椭圆，其中，所以，离心率为

故曲线的长轴长，故A不正确；

曲线：是焦点在轴上的双曲线，其中，所以，离心率为，故与曲线的焦点位置不同，故C不正确；

：的渐近线方程为，故B正确；

又，所以与的离心率互为倒数，故D正确.

故选：BD.

10.已知等差数列的前项和为，若，则下列结论错误的是（    ）

A．数列是递增数列 B．

C．当取得最大值时， D．

【答案】ABC

【分析】由已知，利用等差数列求和公式与等差数列的性质可得：， ，进而判断选项即可.

【详解】因为是等差数列，且，

所以，，

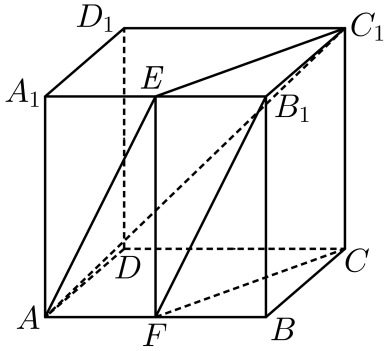
即，所以，，且，所以B错误，D正确；

因为，所以等差数列是递减数列，所以A错误；

所以当时，取得最大值，所以C错误.

故选：ABC

11. 如图，在棱长为2的正方体中，*E*，*F*分别为，*AB*的中点，则下列结论正确的是（ ）



A. 点*B*到直线的距离为

B. 直线*CF*到平面的距离为

C. 直线与平面所成角的余弦值为

D. 直线与直线所成角的余弦值为

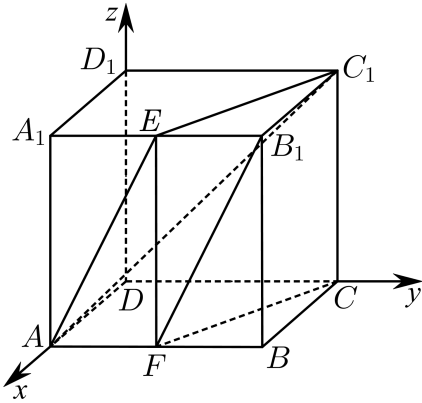
【答案】ABD

【解析】

【分析】以为坐标原点，建立空间直角坐标系，利用向量法即可结合选项逐一求解．

【详解】在棱长为2的正方体中，，分别为，的中点，

以为坐标原点，建立空间直角坐标系，如图，



,2,，,0,，,2,，,2,，,2,，

则点到直线的距离为：

，故A正确；

,0,，,1,，,1,，,2,，

,,，,1,，,2,，,1,，

设平面的法向量,,，

则，取，得,2,，

由于分别为的中点，所以 且，

因此四边形为平行四边形，故,

又平面, 平面,所以平面，

直线到平面的距离为，故B正确；

设直线与平面所成角，则，故C错误；

,2,，,,，

设直线与直线所成角为，则，故D正确．

故选：ABD．

12. 如图的形状出现在南宋数学家杨辉所著的《详解九章算法·商功》中，后人称为“三角垛”．“三角垛”最上层有个球，第二层有个球，第三层有个球，…设第层有个球，从上往下层球的总数为，则下列结论正确的是（ ）



A.  B. 

C. ， D. 

【答案】ACD

【解析】

【分析】根据每层球数变化规律可直接求解得到AB正误；利用累加法可求得C正确；采用裂项相消法可求得D正确.

【详解】对于A，，A正确；

对于B，由每层球数变化规律可知：，B错误；

对于C，当时，；

当时，满足，；

，C正确；

对于D，，

，D正确.

故选：ACD.

**第**Ⅱ**卷**

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

13. 已知四棱锥的底面是平行四边形，若，则\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】

【分析】根据空间向量的运算及空间向量基本定理得答案.

【详解】因为四棱锥的底面是平行四边形，所以，

又，由空间向量基本定理可得，，故.

故答案为：.

14. 已知数列的前*n*项和为，若，则\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】

【分析】先令得到，再令得到，从而得到为常数，得到数列是首项为，公比为2的等比数列，从而直接求得通项公式.

【详解】令，得，所以；

令，则，

两式相减得，，即，

所以，

因为，所以，

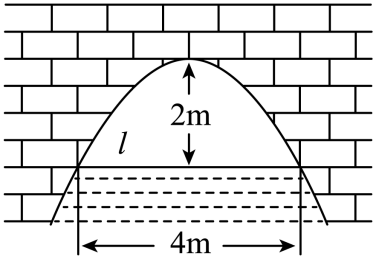
所以为常数，

所以数列是首项为，公比为2的等比数列，

所以.

故答案为：

15. 如图是一座抛物线型拱桥，拱桥是抛物线的一部分且以抛物线的轴为对称轴，当水面在*l*时，拱顶离水面2米，水面宽4米．当水位下降，水面宽为6米时，拱顶到水面的距离为\_\_\_\_\_\_米．



【答案】4.5##

【解析】

【分析】建立平面直角坐标系，设抛物线方程为，求出抛物线的方程，再代点的坐标即得解.

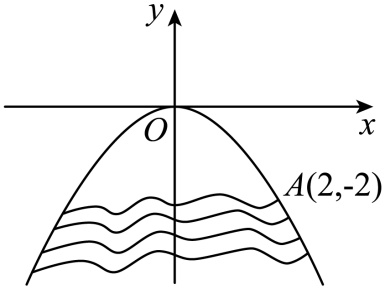
【详解】如图，建立平面直角坐标系，设抛物线方程为，

将代入，得，所以．

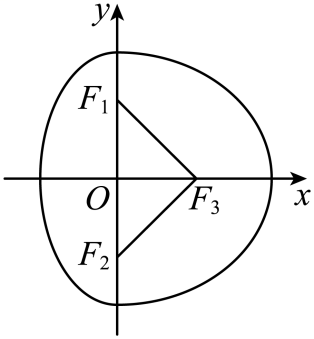
设，代入，得．

所以拱桥到水面的距离为．

故答案为：4.5.



16. 如图，我们把由半椭圆和半椭圆合成的曲线称作“果圆”．，，是相应半椭圆的焦点，则的周长为\_\_\_\_\_\_，直线与“果圆”交于，两点，且中点为，点的轨迹方程为\_\_\_\_\_\_．



【答案】 ①.  ②. 

【解析】

【分析】根据各半椭圆方程可得，，的坐标，再根据两点间距离公式求得距离及周长；分别表示点，的坐标，利用中点公式表示，消参即可得到点，得轨迹方程.

【详解】由，，是相应半椭圆焦点，

可得，，，

所以，，，

故所求周长为；

设，

联立直线与，得，

即点，

联立直线与，得，

即点，且不重合，即，

又为中点，

所以，

即，，整理可得，，

故答案为：，.

四、解答题：本题共6小题，共70分．第17题10分，其他每题12分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17. （10分）已知的顶点坐标为，，.

(1)求边上的高的长.

(2)求的面积.

【答案】(1)

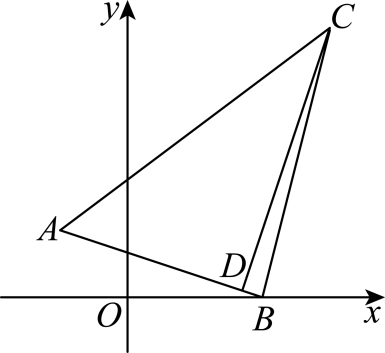
(2)

【分析】（1）求出直线的方程，利用点到直线的距离即可求解；

（2）求出的长，用面积公式即可求解.

【详解】（1）由题意，直线的方程为：，即.

故点到直线的距离即为边上的高的长，



所以.

（2）因为 ，

所以的面积为：.

18.（12分） 已知数列是等差数列，是各项均为正数的等比数列，数列的前*n*项和为，且，，．

（1）求数列，的通项公式；

（2）令，求数列的前12项和．

【答案】（1），

（2）2796

【解析】

【分析】（1）由数列是等差数列，是各项均为正数等比数列，设出公差和公比，根据题意列出方程组求解即可；

（2）根据题意写出数列通项公式，用分组求和法，结合等差等比求和公式求解即可.

【小问1详解】

设数列的公差为*d*，数列的公比为，

由题意可得，，即，

所以，

因为，所以，

所以，．

【小问2详解】

由（1）可得，

所以的所有奇数项组成以1为首项，4为公差的等差数列；

所有偶数项组成以2为首项，4为公比的等比数列．

所以，



．

19. （12分）已知直线经过抛物线*C*：的焦点*F*，且与*C*交于*A*，*B*两点．

（1）求*C*的方程；

（2）求圆心在*x*轴上，且过*A*，*B*两点的圆的方程．

【答案】（1）；

（2）.

【解析】

【分析】（1）求出抛物线的焦点坐标，代入直线方程即可求解作答.

（2）根据给定条件，求出线段*AB*的中垂线方程，再求出圆心坐标及半径作答.

【小问1详解】

依题意，抛物线*C*的焦点在直线上，则，解得，

所以*C*的方程为．

【小问2详解】

由（1）知，抛物线*C*的准线方程为，设，，*AB*的中点为，

由消去*y*得，则，有，，即，

因此线段*AB*的中垂线方程为，即，

令，得，设所求圆的圆心为*E*，则，

又*AB*过*C*的焦点*F*，则有，

设所求圆的半径为*r*，则，

故所求圆的方程为．

20. （12分）已知数列的前*n*项和．

（1）证明是等比数列，并求的通项公式；

（2）在和之间插入*n*个数，使这个数组成一个公差为的等差数列，求数列的前*n*项和．

【答案】（1）证明见解析，

（2）

【解析】

【分析】（1）利用及已知即可得到证明，从而求得通项公式；

（2）先求出通项，再利用错位相减法求和即可.

【小问1详解】

因为，

当时，，

所以，当时，，又，解得，

所以是以2为首项，2为公比的等比数列，

故

【小问2详解】

因为，所以，，

，

，

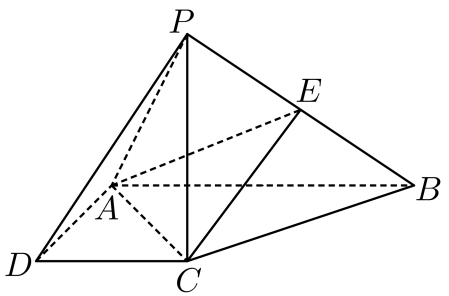
所以



，

所以

21. （12分）如图，在四棱锥中，底面，四边形是直角梯形，，，，点*E*在棱*PB*上．



（1）证明：平面平面*PBC*；

（2）当时，求二面角的余弦值．

【答案】（1）证明见解析

（2）

【解析】

【分析】（1）由线面垂直得到线线垂直，求出各边长，由勾股定理逆定理得到，从而证明出线面垂直，面面垂直；

（2）解法一：以*C*为原点，*CB*，*CA*，*CP*所在直线分别为*x*轴，*y*轴，*z*轴，建系，写出点的坐标及平面的法向量，求出二面角的余弦值；

解法二：取*AB*的中点*G*，连接*CG*，以点*C*为原点，*CG*，*CD*，*CP*所在直线分别为*x*轴，*y*轴，*z*轴，建系，写出点的坐标及平面的法向量，求出二面角的余弦值；

【小问1详解】

因为底面，平面，

所以．

因为，，所以．

所以，所以．

又因为，平面*PBC*，平面*PBC*，

所以平面*PBC*．

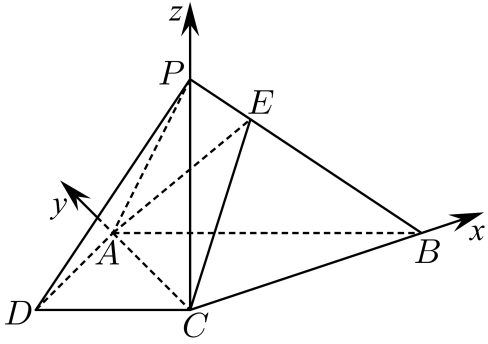
又平面*EAC*，

所以平面平面*PBC*．

【小问2详解】

解法一：

以点*C*为原点，*CB*，*CA*，*CP*所在直线分别为*x*轴，*y*轴，*z*轴，建立如图所示的空间直角坐标系，则，，，．



设点*E*的坐标为，因为，所以，

即，，，所以．

所以，．

设平面*ACE*的一个法向量为，则．

所以，取，则，．

所以平面*ACE*的一个法向量为．

又因为平面*PAC*，所以平面*PAC*的一个法向量为．

设平面*PAC*与平面*ACE*的夹角为，

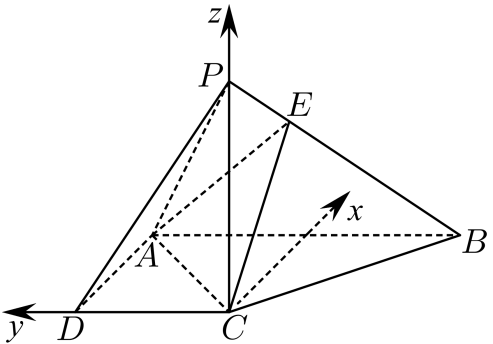
则．

所以，平面*PAC*与平面*ACE*夹角的余弦值为．

解法二：

取*AB*的中点*G*，连接*CG*，以点*C*为原点，*CG*，*CD*，*CP*所在直线分别为*x*轴，*y*轴，*z*轴，建立如图所示

的空间直角坐标系，则，，，．



设点*E*的坐标为，因为，所以，

即，，，所以．

所以，．

设平面*ACE*的一个法向量为，则．

所以，取，则，．

所以，平面*ACE*的一个法向量为．

又因为平面*PAC*，所以平面*PAC*的一个法向量为．

设平面*PAC*与平面*ACE*的夹角为，

则．

所以，平面*PAC*与平面*ACE*夹角的余弦值为

22. （12分）已知椭圆*C*：的左、右焦点分别为，（），上顶点为*A*，，且到直线*l*：的距离为．

（1）求*C*方程；

（2）与*l*平行的一组直线与*C*相交时，证明：这些直线被*C*截得的线段的中点在同一条直线上；

（3）*P*为*C*上的动点，*M*，*N*为*l*上的动点，且，求面积的取值范围．

【答案】（1）

（2）证明见解析 （3）．

【解析】

【分析】（1）由题意，根据椭圆的顶点坐标以及点到直线距离公式，可得答案；

（2）由两直线的平行关系，设出直线方程，联立方程，利用韦达定理，表示出中点坐标，可得答案；

（3）根据直线的平移，取与椭圆相切是的临界点，利用三角形的面积公式，可得答案.

【小问1详解】

设，，由题意得，

解得，所以*C*的方程为．

【小问2详解】

证明：设这组平行线的方程为，与联立消去*x*，得，

则，得．

设直线被*C*截得的线段的中点为，则，其中，是方程的两个实数根．

所以，

消去*m*，得，所以这些直线被*C*截得的线段的中点均在直线上．

【小问3详解】

由（2）知，*l*与*C*相离，

当直线与*C*相切时，，解得或．

当时，直线与*l*的距离为，此时，

当时，直线与*l*的距离为，此时，

所以面积的取值范围为．